EXERCICE N° 1 — 20' — 5 point

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{2(u_{n+1} + 2)}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - 2 \leqslant \dfrac{3}{4}(u_n - 2)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 2 \leqslant 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   (c) Prouver que la suite u converge vers un réel que l'on précisera.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $0 \leqslant S_n - n(n+1) \leqslant 8n\left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$.
   (b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

EXERCICE N° 2 — 25' — 5 point

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n}, \end{cases}$

1. Montrer que pour tout n , $U_n \geq 2$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 3|$;
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (U_n).

3. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$
   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

☎ : 23390248 - 29862267
Tous droits réservées ©TakiAcademy.com

(c) Retrouver la limite de la suite U.

EXERCICE N° 3 | **20'** | **5 point**

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :$u_0 = 1; v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ où est un réel donné tel que $< \alpha < 1$.

1. Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$.
   (a) Calculer t_0 et t_1 .
   (b) Montrer que,pour tout entier naturel n,$t_n = (2\alpha - 1)^n$.
   (c) En déduire la limite de t_n.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,$u_n \leq v_n$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ .
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n,$u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite ℓ.

☎ : 23390248 - 29862267
Tous droits réservées ©TakiAcademy.com